

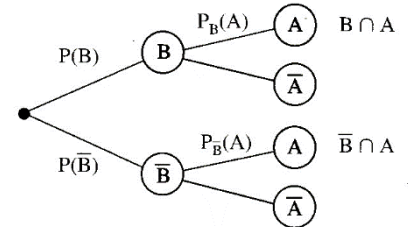
Die totale Wahrscheinlichkeit

Die Belegschaft eines großen Betriebes besteht zu 41% Prozent aus Angestellten und zu 59% Prozent aus Arbeitern. Die gesamte Belegschaft soll per Abstimmung entscheiden, ob für einige Abteilungen die gleitende Arbeitszeit eingeführt werden soll. Interne Untersuchungen ergaben, dass 80% der Angestellten, aber nur 25% der Arbeiter für die gleitende Arbeitszeit sind. Wie wird die Abstimmung wohl ausgehen? Trage die Ergebnisse in ein Baumdiagramm ein.

An: „Angestellter“ und G: „Für Gleitzeit“

Diese Aufgabe führt uns direkt zum **Satz von der totalen oder absoluten Wahrscheinlichkeit**:

A und B seien beliebige Ereignisse mit $P(B) \neq 0$, $P(\bar{B}) \neq 0$. Dann gilt:



Übung 20

In einem Entwicklungsland leiden ca. 0,1% der Menschen an einer bestimmten Infektionskrankheit. Ein Test zeigt die Krankheit bei 98% der Kranken korrekt an, während er bei 5% der Gesunden irrtümlich die Krankheit anzeigt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt der Test bei einer zufällig ausgewählten Person ein positives Resultat? (Lösen Sie mithilfe eines Baumdiagramms und des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit.)

Übung 21

Ein Kandidat für den Posten des Schulsprechers wird von 63% der 528 weiblichen Schüler favorisiert. Von den Jungen wollen 41% für ihn stimmen. Insgesamt sind 1200 Schüler auf der Schule. Mit welchem Stimmanteil kann er rechnen?

Hausaufgabe:

Beispiel: Im Schlippental ist das Wetter an 70 von 100 Tagen schön und an 30 von 100 Tagen schlecht. Der königliche Hofmeteorologe simuliert das Wetter daher mithilfe einer Urne, die 7 rote und 3 schwarze Kugeln enthält. Zieht er eine rote Kugel, so prognostiziert er für den folgenden Tag schönes Wetter, andernfalls schlechtes Wetter. Radio Schlippental hat einen einheimischen Breitmaulfrosch unter Vertrag, der schöne Tage mit 90% und schlechte Tage mit 60% Sicherheit vorhersagen kann. Wessen Prognosen sind treffsicherer?



Verwende folgende Bezeichnungen: S: „Schönes Wetter“ M: „Meteorologe liegt richtig.“ F: „Frosch liegt richtig!“ Zeichne jeweils ein Baumdiagramm für den Meteorologen und eines für den Frosch.

Umkehrung des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit:

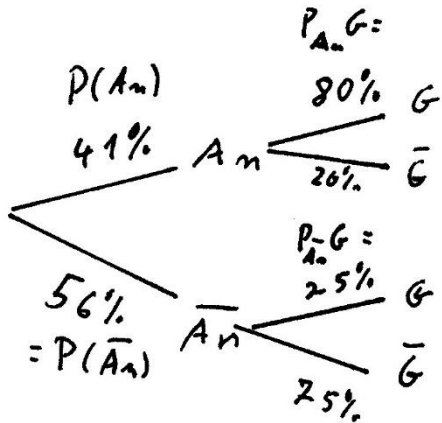
Für eine Sozialkundehausaufgabe wird der Jahrgang nach ihrer Meinung zum Mainzer Weihnachtsmarkt befragt. Es wird vermutet, dass Mädchen lieber auf den Weihnachtsmarkt als Jungen gehen. Leider hat Hans die Zahlen verlegt. Er kann sich nur noch an folgende Ergebnisse erinnern: $\frac{2}{5}$ im Jahrgang sind Jungen. Von den Mädchen gehen $\frac{3}{4}$ gerne auf den Weihnachtsmarkt. Etwa 41.66 % von allen Befragten gehen nicht gerne auf den Weihnachtsmarkt.

Welche Schlüsse sollten die Weihnachtsmarktbetreiber aus den gewonnen Zahlen ziehen?

Lösung: Die totale Wahrscheinlichkeit

Die Belegschaft eines großen Betriebes besteht zu 41% Prozent aus Angestellten und zu 59% Prozent aus Arbeitern. Die gesamte Belegschaft soll per Abstimmung entscheiden, ob für einige Abteilungen die gleitende Arbeitszeit eingeführt werden soll. Interne Untersuchungen ergaben, dass 80% der Angestellten, aber nur 25% der Arbeiter für die gleitende Arbeitszeit sind. Wie wird die Abstimmung wohl ausgehen? Trage die Ergebnisse in ein Baumdiagramm ein.

An: „Angestellter“ und G: „Für Gleitzeit“



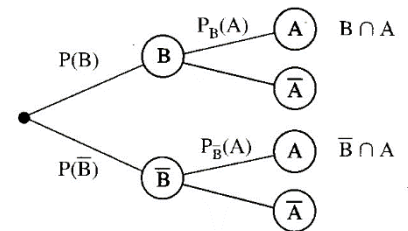
Rechnung:

$$\begin{aligned} P(G) &= P(R) \cdot P_R(G) + P(\bar{R}) \cdot P_{\bar{R}}(G) \\ &= 0,59 \cdot 0,25 + 0,41 \cdot 0,80 \\ &= 0,4755 \end{aligned}$$

Diese Aufgabe führt uns direkt zum **Satz von der totalen oder absoluten Wahrscheinlichkeit**:

A und B seien beliebige Ereignisse mit $P(B) \neq 0$, $P(\bar{B}) \neq 0$. Dann gilt:

$$P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$



Übung 20

In einem Entwicklungsland leiden ca. 0,1% der Menschen an einer bestimmten Infektionskrankheit. Ein Test zeigt die Krankheit bei 98% der Kranken korrekt an, während er bei 5% der Gesunden irrtümlich die Krankheit anzeigt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt der Test bei einer zufällig ausgewählten Person ein positives Resultat? (Lösen Sie mithilfe eines Baumdiagramms *und* des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit.)

Übung 21

Ein Kandidat für den Posten des Schulsprechers wird von 63% der 528 weiblichen Schüler favorisiert. Von den Jungen wollen 41% für ihn stimmen. Insgesamt sind 1200 Schüler auf der Schule. Mit welchem Stimmanteil kann er rechnen?

Lösung:

20. K: "Person ist krank"

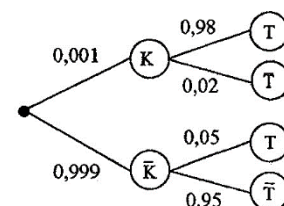
T: "Testergebnis positiv"

$$P(T) = 0,001 \cdot 0,98 + 0,999 \cdot 0,05 = 0,05093 \approx 5,1\%$$

21. W: "Schüler ist weiblich", $P(W) = 0,44$

E: "Stimme für den Kandidaten"

$$P(E) = 0,44 \cdot 0,63 + 0,56 \cdot 0,41 = 0,2772 + 0,2296 = 50,68\%$$



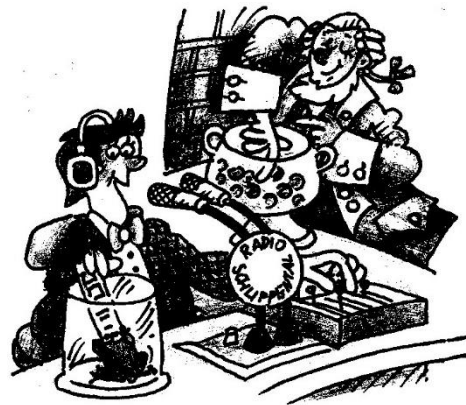
Hausaufgabe:

Beispiel: Im Schlipptental ist das Wetter an 70 von 100 Tagen schön und an 30 von 100 Tagen schlecht.

Der königliche Hofmeteorologe simuliert das Wetter daher mithilfe einer Urne, die 7 rote und 3 schwarze Kugeln enthält. Zieht er eine rote Kugel, so prognostiziert er für den folgenden Tag schönes Wetter, andernfalls schlechtes Wetter.

Radio Schlipptental hat einen einheimischen Breitmaulfrosch unter Vertrag, der schöne Tage mit 90% und schlechte Tage mit 60% Sicherheit vorhersagen kann.

Wessen Prognosen sind treffsicherer?



Verwende folgende Bezeichnungen: S: „Schönes Wetter“ M: „Meteorologe liegt richtig. F: „Frosch liegt richtig!“ Zeichne jeweils ein Baumdiagramm für den Meteorologen und eines für den Frosch.

Lösung:

Lösung:

Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

S: „Es tritt schönes Wetter ein“

M: „Die Prognose des Meteorologen ist richtig“

F: „Die Froschprognose ist richtig“

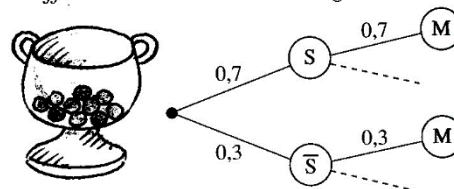
Nun bestimmen wir die totale Wahrscheinlichkeit der Ereignisse M und F, deren bedingte Wahrscheinlichkeiten $P_S(M) = 0,7$, $P_{\bar{S}}(M) = 0,3$, $P_S(F) = 0,9$ und $P_{\bar{S}}(F) = 0,6$ wir der Aufgabenstellung entnehmen können.

Mithilfe der abgebildeten Baumdiagramme bzw. mit der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit erhalten wir

$$P(M) = 58\% \text{ und } P(F) = 81\%.$$

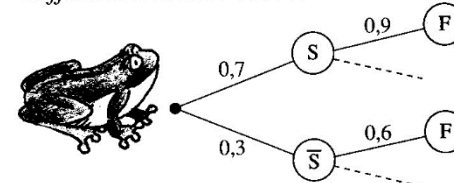
► Der Frosch ist also besser.

Treffsicherheit des Meteorologen:



$$P(M) = 0,7 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,3 = 0,58 = 58\%$$

Treffsicherheit des Frosches:



$$P(F) = 0,7 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,6 = 0,81 = 81\%$$

Umkehrung des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit:

Für eine Sozialkundehausaufgabe wird der Jahrgang nach ihrer Meinung zum Mainzer Weihnachtsmarkt befragt. Es wird vermutet, dass Mädchen lieber auf den Weihnachtsmarkt als Jungen gehen. Leider hat Hans die Zahlen verlegt. Er kann sich nur noch an folgende Ergebnisse erinnern: $\frac{2}{5}$ im Jahrgang sind Jungen. Von den Mädchen gehen $\frac{3}{4}$ gerne auf den Weihnachtsmarkt. Etwa 41,66 % von allen Befragten gehen nicht gerne auf den Weihnachtsmarkt.

Lösung:

$$P(\bar{W}) = P(J) \cdot P_J(\bar{W}) + P(\bar{J}) \cdot P_{\bar{J}}(\bar{W})$$

